Asymptotische Analyse

$(\frac{1}{3})^n, 6, \log\log n, \log n \Leftrightarrow \ln n, (\log n)^2, n^{\frac{1}{3}} + \log n, \sqrt{n}, \frac{n}{\log n}, n, n\log n, n^2 \Leftrightarrow n^2 + \log n, n^3, n - n^3 + 7n^5, (\frac{3}{2})^n, 2^n, n!$

Beachte: $(\frac{1}{3})^n$ ist vor 6

Rekursionsgleichung

1. Teleskopieren:

   $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2(2T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}) + n = 2(2(2T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4}) + \frac{n}{2}) + n = ... = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + n\sum\limits_{j=0}^{i-1}(\frac{2}{2})^j = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + n * i = ... = 2^{\log_2 n} T(1) + n\log_2 n = n\log_2 n + n$

2. Beweis durch Induktion:

   Ver.: $n = 1 \to n\log_2 n + n = 1 = T(n)$

   Schritt: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2(\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} + \frac{n}{2}) + n = n\log_2\frac{n}{2} + n + n = n(\log_2 n - \log_2 2) + 2n = n\log_2 n - n + 2n = n\log_2 n + n$

Codefragmente

1. $i := 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{\log_2 n}$

   $j := 1...i$

   $\sum\limits_{k=0}^{\log n} 2^k = \frac{2^{\log n + 1} - 1}{2-1} = 2n - 1 = \Theta(n)$

2. $\Theta(n\log n)$

3. $\Theta(n\log n)$

4. $\Theta(n)$

   Innere Schleife wird $\approx \log\frac{n}{i}$ mal ausgeführt (von $1 \ldots n$ wäre $\log n \rightsquigarrow$ bis i sind $\log i \rightsquigarrow \log n - \log i = \log\frac{n}{i}$)

   Unterschätzen:

   $\sum_{i=1}^{n}\log\frac{n}{i} \geqslant n/2 = \Omega(n)$, da für $i = 1 \ldots n/2$ ist $\log\frac{n}{i}$ mindestens 1

   Überschätzen:

   Andererseits ist $\sum_{i=1}^{n}\log\frac{n}{i} = n\log n - \sum_{i=1}^{n}\log i = n\log n - \log(n!)$, aber $\log(n!) \geqslant n\log n - n$ (stirling approx.) $\rightsquigarrow \leqslant n\log n - (n\log n - n) = \mathcal{O}(n)$